№11-дәріс.

Сандық қатарлар түсінігі.

Тақырыбы: Сандық қатарлардың жинақтылығы мен қосындысы. Негізгі аныктамалар. Жинақты қатарлардың қасиеттері, қатар жинақтылығының Коши критерийі. Сандық қатарлардың жинақтылығының қажетті шарты. Мүшелері теріс емес сандық қатарлар, олардың жинақталу белгілері: салыстыру белгісі, Коши, Даламбер, Раабе, Гаусс белгілері. Мүшелері теріс емес сандық қатарлар жинақтылығы үшін Кошидың интегралдық белгісі.

Анықтама 1. Берілген шектеусіз сандар тізбегі $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ үшін:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \qquad (1)$$

өрнегі сандық қатар деп аталады, мұндағы $a_i, i = 1,2,...$ сандары – қатардың мүшелері. $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n, n = 1,2,...$ саны қатардың бөлік қосындысы деп аталады.

Анықтама 2. Егер $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, шегі табылатын болса, онда S (1) қатарының қосындысы деп аталады.

Анықтама 3. Қатар жинақты деп аталады, егер S тұрақты санға тең болса, кері жағдайда, яғни, $\lim_{n\to\infty} S_n$ шегі шексіздікке тең болса немесе табылмаса, онда қатар жинақсыз деп аталады.

Мысал 1. Қатардың қосындысын тап $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$.

Шешуі. Қатардың жалпы мүшесі:

$$a_n = \frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right).$$

Алынған формуланы қолданып, қатардың n-ші бөлік қосындысын табайық :

$$S_n = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + ... + a_n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 6} + ... + \frac{1}{(n-1)(n+2)} + \frac{1}{n(n+3)}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) + ... + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right).$$

Сонымен,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{18}.$$

Ендеше, берілген қатар жинақты және оның қосындысы $S = \frac{11}{18}$.

Мысал 2. $a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ...,\quad a \neq 0$ түріндегі қатарды (геометриялық прогрессия) қарастырайық. Онда бөлік қосынды:

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}$$

1) Егер $\left|q\right| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$

2) Егер $\left|q\right| > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left|q^n\right| = \infty \Rightarrow \dfrac{a - aq^n}{1-q} \to \pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ - табылмайды.

3) Егер $\left|q\right| = 1$, онда

а) $q = 1 \Rightarrow a + a + ... + a + ... \Rightarrow S_n = n \cdot a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a = \infty$ ($a > 0$ болса)

б) $q = -1 \Rightarrow a - a + a - a + ... \Rightarrow S_n = 0$, егер n -жұп болса және $S_n = a$, егер n -тақ болса, $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ - табылмайды.

Сонымен, қатар $\left|q\right| < 1$ болғанда ғана жинақты.

Қатардың соңғы мүшелерін лақтырып тастағаннан оның жинақтылығы өзгермейді. Жинақты қатар:

$a = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$

$b = b_1 + b_2 + ... + b_n + ...$.

үшін келесі теңдіктер орынды:

а) $ca = ca_1 + ca_2 + ... + ca_n + ...$, $c - const$

б) $a \pm b = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + ... + (a_n + b_n) + ...$

Теорема 1.Қатардың жинақтылығының қажетті шарты. (1) қатары жинақты болуы үшін $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ болуы қажетті.

Мысал 3. $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{7} + ... + \dfrac{n}{2n+1} + ...$ қатары жинақсыз, себебі қатардың жинақтылығының қажетті шарты орындалмайды: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2} \neq 0$.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ болу шартынан қатардың жинақты екені шықпайды.

Таңбасы оң қатарлар.

2-мысалда көрсетілгендей S_n бөлік қосындысының ақырлы формуласын анықтау кей жағдайларда қиындық туғызуы мүмкін. Сондықтан, қатардың жалпы мүшесін білу ғана жеткілікті болатын қатардың жинақтылығының жеткілікті белгілерін білген жөн. Тек қана таңбалары оң қатарлар үшін ғана ақиқат болатын белгілерге тоқталайық.

Мүшелері оң сандар болатын қатарларды қарастырамыз:

$$a = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \tag{2}$$

$$b = b_1 + b_2 + ... + b_n + ... \tag{3}$$

Теорема 2. Салыстыру белгілері:

1.Егер қандай да бір N нөмірінен бастап, $a_n \le b_n$, $n = N, N+1,...$ теңсіздігі орынды болса, онда

а) (3) қатарының жинақтылығынан (2) қатарының жинақты екені шығады,

б) (2) қатарының жинақсыздығынан (3) қатарының жинақсыз екені шығады.

2. Егер $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = k \neq 0$ ақырлы шегі табылса, онда (1) және (2) қатарлары не екеуі де бірдей жинақты, не екеуі де бірдей жинақсыз.

Мысал 4. Қатарды жинақтылыққа зертте:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{n^n}+... \qquad (4)$$

Жинақты (мысал 1, $q=\frac{1}{2}, a=1$) болатын

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^n}+...$$

қатарын қарастыралық, $n\geq 2$ үшін: $\frac{1}{n^n}\leq\frac{1}{2^n}$ болғандықтан, $\frac{1}{2^2}\leq\frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^3}<\frac{1}{2^3},...,$ ендеше (4) қатары жинақты.

Теорема 3-4. Даламбер белгісі (Коши). Егер $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l\right)$, мұндағы l -ақырлы сан болса, онда:

а) егер $l<1$ болса, онда (1) қатары жинақты,

б) егер $l>1$ болса, (1) қатары жинақсыз,

в) $l=1$ қатардың жинақтылығы туралы сұрақ ашық қалады.

Мысал 5. Қатарды жинақтылыққа зертте:

а) $\frac{3}{5}+\left(\frac{5}{8}\right)^2+\left(\frac{7}{11}\right)^3+...+\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n+...$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n=\left(\frac{2}{3}\right)^\infty=0$, яғни, жинақтылықтың қажетті шарты орындалады. Коши белгісін қолданамыз:

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+2}=\frac{2}{3}<1$ - қатар жинақты.

б) гармониялық қатар үшін:

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$

Жинақтылықтың қажетті шарты : $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ орындалады. Даламбер белгісін

қолданамыз: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$ -жинақтылық туралы сұрақ ашық қалады.

Мысал 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{5n+2}\right)^{3n+4}$.

Шешуі. $a_n=\left(\frac{4n-3}{5n+2}\right)^{3n+4}$ болады. Коши белгісін қолдансақ:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n-3}{5n+2}\right)^{\frac{3n+4}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4-\frac{3}{n}}{5+\frac{2}{n}}\right)^{3+\frac{4}{n}}=\left(\frac{4}{5}\right)^3<1.$$

Яғни, берілген қатар жинақты.

Теорема 5. Кошидің интегралдық белгісі. Қандай да бір N нөмірінен бастап $a_N \geq a_{N+1} \geq a_{N+2} \geq \ldots$ теңсіздігі орындалсын және $f(x)$ функциясы мынадай үзіліссіз өспелі емес функция болсын: $f(N) = a_N$, $f(N+1) = a_{N+1}, \ldots$. Онда, егер $\int_N^{\infty} f(x)dx$ жинақты (жинақсыз) болса, онда (1) қатары жинақты (жинақсыз).

Мысал 7. Берілген қатарды жинақтылыққа зертте:

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots, \qquad p > 0 - const \ . \tag{5}$$

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^p} = 0$ - қатардың жинақтылығының қажетті шарты орындалады.

$\frac{1}{1^p} > \frac{1}{2^p} > \frac{1}{3^p} > \ldots$ болғандықтан, $f(x) = \frac{1}{x^p}$, $N = 1$ деп алып, Кошидің интегралдық белгісін қолдансақ;

а) $p = 1$ болса, онда $I = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{N \to \infty} ln\ x\Big|_1^N = \lim\limits_{N \to \infty} \left(ln\ N - ln\ 1\right) = \infty$, яғни, интеграл жинақсыз.

б) $I = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{N \to \infty} \frac{x^{1-p}}{1-p}\Bigg|_1^N = \frac{1}{1-p} \lim\limits_{N \to \infty} \left(N^{1-p} - 1\right)$.

Бұл интеграл $p > 1$ болғанда жинақты, ал $p < 1$ жинақсыз.

Ендеше, (5) қатары $p > 1$ болғанда ғана жинақты, ал қалған жағдайларда жинақсыз.

Егер p=1 болса, (5) қатары біз жоғарыда 5-мысалда қарастырған гармониялық қатар болады және ол жинақсыз. Ал $p \neq 1$ болса, онда (5) Дирихле қатары деп аталады.

Мысал 8. Қатарды жинақтылыққа зертте: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$.

Шешуі. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ қатарымен салыстыралық, бұл қатар көрсеткіші $p = \frac{1}{2} < 1$ болатын Дирихле қатары және ол жинақсыз. $a_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^3}} > \frac{n}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n$.Ендеше, салыстырудың бірінші белгісі бойынша берілген қатар жинақсыз.